

Міністерство освіти і науки України

Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна

Кафедра прикладної математики

“ЗАТВЕРДЖУЮ”

Декан факультету  
математики і інформатики

Григорій ЖОЛТКЕВИЧ

“29” серпня 2024 р.



## РОБОЧА ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

### Керованість робастних систем

рівень вищої освіти перший (бакалаврський) рівень

галузь знань 11– Математика та статистика

спеціальність 113 – Прикладна математика

освітня програма «Прикладна математика»

спеціалізація \_\_\_\_\_

вид дисципліни за вибором

факультет математики і інформатики

2024 / 2025 навчальний рік

Програму рекомендовано до затвердження Вченою радою факультету математики і інформатики

“27” серпня 2024 року, протокол № 8

РОЗРОБНИКИ ПРОГРАМИ: **Ревіна Тетяна Володимирівна**, канд. фіз.-мат. наук, доцент закладу вищої освіти кафедри прикладної математики.

Програму схвалено на засіданні кафедри прикладної математики  
Протокол від “26” серпня 2024 року № 8

Завідувач кафедри прикладної математики



Валерій КОРОБОВ

Програму погоджено з гарантом  
освітньо-професійної програми «Прикладна математика»

Гарант освітньо-професійної програми «Прикладна математика»



Сергій ПОСЛАВСЬКИЙ

Програму погоджено науково-методичною комісією  
факультету математики і інформатики

Протокол від “27” серпня 2024 року № 1

Голова науково-методичної комісії факультету математики і інформатики



Євген МЕНЯЙЛОВ

## ВСТУП

Програма навчальної дисципліни «**Керованість робастних систем**» складена відповідно до освітньо-професійної програми підготовки бакалавра спеціальності 113 Прикладна математика

### 1. Опис навчальної дисципліни

1.1. Мета викладання навчальної дисципліни

Метою викладання навчальної дисципліни є надання майбутнім фахівцям знань в галузі сучасної теорії керованості робастних систем та використання її методів при дослідженнях прикладних задач.

1.2. Основні завдання вивчення дисципліни:

оволодіння майбутніми спеціалістами основними методами розв'язку задач з теорії керованості робастних систем та здатність застосовувати методи цієї теорії до розв'язку прикладних задач.

1.3. Кількість кредитів 4

1.4. Загальна кількість годин 120

1.5. Характеристика навчальної дисципліни	
За вибором	
Денна форма навчання	Заочна (дистанційна) форма навчання
Рік	
4-й	
Семестр	
8-й	
Лек	
32 год.	
Практичні, семінарські заняття	
32 год.	
Лабораторні	
Самостійна	
56 год.	
Індивідуальні	
г	

1.6. Заплановані результати навчання

Студенти повинні досягти таких результатів навчання:

**знати :**

- основні поняття та методи розв'язку задачі синтезу,
- основні поняття та методи теорії розв'язку задачі керованості за скінчений час (finite-time control, finite-time stability),
- теорію та методологію інтервальної арифметики Каухера,
- методи розв'язку інтервальних рівнянь,
- основи теорії стійкості інтервальних многочленів і інтервальних матриць,
- основні ідеї дослідження задач теорії керованості робастних систем;

**вміти :**

- розв'язувати різними методами задачу синтезу
- розв'язувати задачі синтезу за скінчений час (finite-time control, finite-time stability),
- розв'язувати різні типи інтервальних рівнянь,
- досліджувати інтервальні многочлени і інтервальні матриці на стійкість,
- розв'язувати задачі синтезу для робастних систем.

## 2. Тематичний план навчальної дисципліни.

### Розділ 1. Інтервальний аналіз.

#### **Тема 1. Інтервальна арифметика Каухера.**

Арифметичні дії з інтервальними числами. Таблиця Келі для операції інтервального множення. Комутативність напівгрупи інтервальної арифметики відносно операцій складання та множення. Вклад Каухера у розвиток інтервальної арифметики. Застосування методів інтервальної арифметики до розв'язку прикладних математичних, фізичних та економічних задач.

#### **Тема 2. Методи розв'язку інтервальних рівнянь.**

Лінійне інтервальне рівняння. Застосування функції Ратшека щоб дати відповідь на питання, чи має рівняння розв'язок. Поняття розв'язку: алгебраїчний розв'язок, об'єднаний розв'язок, керований розв'язок, допустимий розв'язок. Зв'язок між розв'язками. Результати, отримані Rohn: властивості множини розв'язків, обчислення оболонки набору рішень є NP-складною проблемою, знаходження розширення розв'язків. The Hansen-Blik-Rohn enclosure algorithm для знаходження розширення розв'язків. Методи розв'язку інтервального квадратного рівняння.

#### **Тема 3. Стійкість полінома та матриці.**

Стійкість полінома. Характеристичний поліном матриці. Стійкість матриці. Необхідна умова стійкості полінома (теорема Стодоли); критерій стійкості полінома третьої степені (теорема Вишнеградського). Критерії стійкості довільного полінома. Теореми Гурвіца, Л'єнара-Шипара, Рауса. Достатня умова Вишнякової.

#### **Тема 4. Стійкість інтервальних поліномів та матриць.**

Означення інтервального полінома. Стійкість інтервальних поліномів. Теореми Харітонова, Soh. Означення інтервальної матриці. Розв'язок лінійного інтервального матричного рівняння. Інтервальний алгоритм Гаусса. Теореми про границі спектру інтервальних матриць (Теореми Гантмахера, Horn, Hollot and Bartlett, Mori and Kokame,

Hertz, Rohn, Franze). Теорема про стійкість інтервальних матриць (Теорема Rohn, Fu, Barmish, Wang, Soh). Випадок, коли інтервальна матриця є симетричною (Теорема Hertz, Soh). Знаходження спільної квадратичної функції Ляпунова для інтервальної матриці (теорема Barmish and Demarco). Дослідження на стійкість інтервальної матриці є NP складною задачею.

## Розділ 2. Методи розв'язку задачі синтезу для робастних систем.

### Тема 5. Методи розв'язку задачі синтезу.

Формулювання задачі синтезу, приклади, методи розв'язку. Теорема про розв'язок задачі синтезу для довільної нелінійної керованої системи з обмеженим керуванням. Зв'язок функції керованості Коробова, функції Ляпунова та методу динамічного програмування Белмана. Поняття chain of integrator system, розв'язок задачі синтезу. Теорема про розв'язок задачі синтезу для системи інтеграторів.

### Тема 6. Застосування методів інтервального аналізу для розв'язку задачі позиційного синтезу для робастних систем.

Методи розв'язку локального і глобального синтезу для робастних систем за допомогою методу функції керованості. Розв'язок задачі синтезу для збуреної системи інтеграторів. Знаходження повної похідної від функції керованості для збуреної системи. Знаходження меж збурення. Дослідження стійкості відповідної інтервальної матриці. Розв'язок задачі синтезу для збуреної лінійної керованої системи з одновимірним та багатовимірним керуванням. Приклади – задача про зупинку візка на рейках з невідомим тертям; гасіння коливань матеріальної точки на пружині, при жорсткості пружини, заданої неточно, зупинка коливань контрольованого еліптичного маятника; розв'язок задачі синтезу для системи двох пов'язаних пружиною маятників.

### Тема 7. Методи розв'язку задачі синтезу за скінченний час (finite-time stability of control). Методи розв'язку задачі керованості для робастних систем.

Поняття розв'язку задачі синтезу за скінченний час. Роботи Bhat and Bernstein. Теорема відносно часу руху (settling time function). Застосування методів лінійних матричних нерівностей до розв'язку задачі керованості систем. Теорема Мазко, Boyd, Lin, Zimenko. Розв'язок задачі стабілізації для лінійних систем з невизначеностями при матрицях A та B. Розв'язок задачі оптимального керування для робастних систем.

## 3. Структура навчальної дисципліни

Назви модулів і тем	Кількість годин					
	Денна форма					
	Усього	у тому числі				
л		п	лаб	інд	сп	
1	2	3	4	5	6	7
<b>Розділ 1. Інтервальний аналіз.</b>						
Тема 1. Інтервальна арифметика Каухера.	8	2				6
Тема 2. Методи розв'язку	14	4	4			6

інтервальних рівнянь.						
Тема 3. Стійкість полінома та матриці.	13	4	4			5
Тема 4. Стійкість інтервальних поліномів та матриць.	13	4	4			5
<b>Разом за розділом 1</b>	<b>48</b>	<b>14</b>	<b>12</b>			<b>22</b>
<b><i>Розділ 2. Методи розв'язку задачі синтезу для робастних систем.</i></b>						
Тема 5. Методи розв'язку задачі синтезу.	14	4	4			6
Тема 6. Застосування методів інтервального аналізу для розв'язку задачі позиційного синтезу для робастних систем.	23	7	4			12
Тема 7. Методи розв'язку задачі синтезу за скінченний час (finite-time stability of control). Методи розв'язку задачі керованості для робастних систем.	29	7	8			14
<b>Разом за розділом 2</b>	<b>66</b>	<b>18</b>	<b>16</b>			<b>32</b>
<i>Підготовка до контрольної роботи</i>	2					2
<i>Контрольна робота</i>	4		4			
<b>Разом за семестр</b>	<b>120</b>	<b>32</b>	<b>32</b>			<b>56</b>
<b>Усього годин</b>	<b>120</b>	<b>32</b>	<b>32</b>			<b>56</b>

#### 4. Теми семінарських (практичних, лабораторних) занять

№ з/п	Назва теми	Кількість годин
1	Методи розв'язку інтервальних рівнянь.	4
2	Дослідження поліномів і матриць на стійкість.	4
3	Дослідження інтервальних поліномів і матриць на стійкість	4
4	Розв'язок задачі синтезу для chain of integrator system.	4
5	Розв'язок задачі синтезу для збуреної системи інтеграторів.	4
6	Розв'язок задачі синтезу для збуреної лінійної керованої системи з одновимірним та багатовимірним керуванням.	4
7	Поняття розв'язку задачі синтезу за скінченний час. Роботи Bhat and Bernstein.	4
8	<i>Написання та захист контрольної роботи</i>	4
	<b>Разом</b>	<b>32</b>

#### 5. Завдання для самостійної роботи

№	Види, зміст самостійної роботи	Кількість
---	--------------------------------	-----------

з/п		ГОДИН
1	Ознайомлення з літературою і виконання домашніх завдань на тему «Арифметичні дії з інтервальними числами. Таблиця Келі для операції інтервального множення. Комутативність напівгрупи інтервальної арифметики відносно операцій складання та множення. Вклад Каухера у розвиток інтервальної арифметики».	6
2	Ознайомлення з результатами, отриманими Rohn: властивості множини розв'язків, обчислення оболонки набору рішень є NP-складною проблемою, знаходження розширення розв'язків. The Hansen-Blik-Rohn enclosure algorithm для знаходження розширення розв'язків.	4
3	Ознайомлення з методами розв'язку інтервального квадратного рівняння.	2
4	Виконання домашніх завдань на тему «дослідження поліномів і матриць на стійкість»	5
5	Виконання домашніх завдань на тему «дослідження інтервальних поліномів і матриць на стійкість»	5
6	Ознайомлення з теоремою про розв'язок задачі синтезу для довільної нелінійної керованої системи з обмеженим керуванням. Зв'язок функції керованості Коробова, функції Ляпунова та методу динамічного програмування Белмана	6
7	Знаходження повної похідної від функції керованості для збуреної системи. Знаходження меж збурення. Дослідження стійкості відповідної інтервальної матриці.	4
8	Ознайомлення з прикладами – задача про зупинку візка на рейках з невідомим тертям; гасіння коливань матеріальної точки на пружині, при жорсткості пружини, заданої неточно	4
9	Ознайомлення з прикладами - зупинка коливань контрольованого еліптичного маятника; розв'язок задачі синтезу для системи двох пов'язаних пружиною маятників.	4
10	Ознайомлення з літературою і виконання домашніх завдань на тему «теореми відносно часу руху (settling time function)».	4
11	Ознайомлення з літературою щодо застосування методів лінійних матричних нерівностей до розв'язку задачі керованості систем; теореми Мазко, Boyd, Lin, Zimenko.	6
12	Ознайомлення з літературою щодо розв'язку задачі оптимального керування для робастних систем.	4
13	<i>Підготовка до контрольної роботи</i>	2
	<b>Разом</b>	<b>56</b>

## 6. Індивідуальні завдання

Не передбачені навчальним планом

## 7. Методи навчання

Пояснювально-ілюстративний (лекції і практичні заняття), репродуктивний (виконання домашніх завдань), дослідницький (самостійна робота) і частково-пошуковий (контрольна робота) методи.

## 8. Методи контролю

- Перевірка домашніх робіт
- Перевірка контрольної роботи
- Контроль на практичних заняттях
- Контроль на лекціях
- Проведення заліку

## 9. Схема нарахування балів

Поточний контроль, самостійна робота, індивідуальні завдання				Залікова робота	Сума
Розділ 1	Розділ 2	Контрольна робота, передбачена навчальним планом	Разом		
7	7	46	60	40	100

Для допуску до складання підсумкового контролю (заліку) здобувач вищої освіти повинен набрати не менше 10 балів з навчальної дисципліни під час поточного контролю, самостійної роботи.

## Критерії оцінювання

**Контрольна робота** оцінюється у 40 балів. Робота складається з 4 практичних задач. У разі правильної обґрунтованої відповіді студент отримує за завдання бали; якщо у відповіді є помилки, бал не зараховується.

Зміст контрольної роботи:

1. Оцінити за числом Ратшек існування розв'язку лінійного інтервального рівняння. Знайти його алгебраїчний розв'язок. Застосувати the Hansen-Bliek-Rohn enclosure algorithm для знаходження розширення розв'язків.
2. Перевірити, чи є заданий інтервальний поліном стійким. Побудувати 4 полінома Харітонова і 2 полінома Соха і для них перевірити стійкість за допомогою критерія Гурвіця.
3. Перевірити, чи є задана інтервальна матриця стійкою за допомогою теорем Wang, Rohn, Fu. За допомогою теореми Rohn знайти границі спектру інтервальної матриці.
4. Знайти розв'язок задачі синтезу для збуреної системи інтеграторів. Знайти рівняння на функцію керованості і керування. Знайти повну похідну від функції керованості. Для заданого збурення дослідити на стійкість відповідну інтервальну матрицю. Побудувати траєкторію чисельно на комп'ютері.

Критерії оцінки по першому завданню.



7-10 - розв'язок знайдено, існування досліджено, алгоритм застосовано, можливі невеликі помилки

3-6 – або існування не досліджено, або розв'язок не знайдено, the Hansen-Bliek-Rohn enclosure algorithm застосований частково або не застосований взагалі

0-3 – знайдено тільки 1 пункт із питань.

Критерії оцінки по другому завданню.

8-10 – для інтервального поліному перевірено всі критерії стійкості, можливі невеликі помилки

4-7 – задача розв'язана наполовину, тобто побудовано або поліноми Харітонова і досліджено їх на стійкість, або поліноми Соха і досліджено їх на стійкість.

0-3 – розв'язано менше половини, тобто не доведено до кінця дослідження однієї з 2 задач, а 2 зовсім немає

Критерії оцінки по третьому завданню.

8-10 – для інтервальної матриці перевірено всі критерії стійкості і знайдено границі спектру, можливі невеликі помилки

4-7 – задача розв'язана наполовину, тобто інтервальну матрицю перевірено на стійкість знайдено границі спектру

0-3 – розв'язано менше половини, тобто не доведено до кінця дослідження однієї з 2 задач, а 2 зовсім немає

Критерії оцінки по четвертому завданню.

13-16 – задача розв'язана до кінця, можливі невеликі помилки

7-12 – зроблено помилки у обчисленні матриці для рівняння на функцію керованості або у керуванні, не знайдено повну похідну від функції керованості. Або попередні пункти розв'язанні вірно, але не досліджено на стійкість відповідну матрицю. Траєкторія побудована невірно

0-6 – знайдено тільки матрицю для рівняння на функцію керованості або тільки керування. Не знайдено параметр у рівнянні на функції керованості. Траєкторія не побудована.

**Залікова робота** складається з трьох завдань і передбачає письмову відповідь на два теоретичних питання зі списку, який надається студентам заздалегідь, а також розв'язання практичної задачі.

Кожне теоретичне завдання оцінюється максимально 15 балами, задача – 10 балами.

По кожному завданню залікової роботи нараховується:

- максимальний бал у разі правильно обґрунтованої відповіді;
- за незначні помилки оцінка зменшується від 10 до 30 відсотків;
- за значні логічні помилки оцінка зменшується до 50 відсотків, якщо хід міркувань в цілому правильний;
- якщо відповідь не відповідає жодному з критеріїв – виставляється 0 балів.

### Шкала оцінювання (дворівнева)

Сума балів за всі види навчальної діяльності протягом семестру	Оцінка
----------------------------------------------------------------	--------

50-100	зараховано
1-49	не зараховано

## 10. Рекомендована література

### Основна література

1. Дивак М. П. Задачі математичного моделювання статичних систем з інтервальними даними. Тернопіль: Економічна думка ТНЕУ, 2011. 216 с.
2. Дубницький В. Ю., Кобилін А. М., Кобилін О. А. Виконання на мобільних пристроях арифметичних операцій з використанням аксіом класичного та нестандартного інтервального аналізу // Сучасні інформаційні системи. 2021, 5(3), с. 128-136.
3. Жуковська О. А. Основи інтервального аналізу: навч. посіб //К.: Освіта України, 2009.–136 с. – 2009.
4. Співак І. Я., Крепич С. Я. Прикладні аспекти інтервальних обчислень. – 2019. – 149 с.
5. Потаніна Т. В., Єфімов О. В.. "Застосування методів інтервального аналізу для визначення експлуатаційних характеристик енергоблоків АЕС." Вісник Національного технічного університету" ХПІ". Серія:" Гідравлічні машини та гідроагрегати", 2019, 2, с. 77-81.

### Допоміжна література

1. Bhat S. P., Bernstein D. S. Finite-time stability of continuous autonomous systems// SIAM Journal on Control and optimization, 2000, 38(3), pp. 751-766.
2. Boyd S. et al. Linear matrix inequalities in system and control theory. Society for industrial and applied mathematics, 1994.
3. Hansen E. ed. Topics in interval analysis. Oxford: Clarendon Press, 1969.
4. Horn R. A., Johnson C. R. Matrix analysis. Cambridge university press, 2012.
5. Jansson C. Calculation of exact bounds for the solution set of linear interval systems// Linear Algebra and Its Applications, 1997, 251, pp. 321-340.
6. Jaulin L., Kieffer M., Didrit O., Walter E. Applied Interval Analysis. London: Springer Verlag Limited, 2001. 379 p.
7. Kaucher E. Interval analysis in the extended interval space IR // Fundamentals of Numerical Computation (Computer-Oriented Numerical Analysis), 1980, pp. 33-49.
8. Katkova O. M., Vishnyakova A. M. A sufficient condition for a polynomial to be stable // Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2008, 347(1), pp. 81-89.
9. Korobov V. I. A general approach to the solution of the bounded control synthesis problem in a controllability problem// Math. Sb., 1980, 37(4), pp. 535-557.
10. Korobov V.I, Sklyar G.M. Methods for constructing positional controls, and a feasible maximum principle // Dif. Equ.,1990, 26(11), pp. 1422-1431.
11. Korobov V. I., Revina T. V. Robust feedback synthesis for the canonical system // Ukr. Math. J., 2016, 68(3), pp. 380-398.

12. Korobov V. I., Revina T. V. On perturbation range in the feedback synthesis problem for a chain of integrators system // IMA J. Math. Control and Information, 2021, 38(1), pp. 396-416.
13. Korobov V. I., Revina T. V. On the feedback synthesis for an autonomous linear system with perturbations// Journal of Dynamical and Control Systems, <https://doi.org/10.1007/s10883-024-09690-4>
14. Lin, Feng. Robust control design: an optimal control approach. John Wiley & Sons, 2007.
15. Moore R. E., Baker Kearfott R., Michael J. Cloud. Introduction to interval analysis. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2009. 223 p.
16. Polyakov A, Krstic M. Finite-and fixed-time nonovershooting stabilizers and safety filters by homogeneous feedback. IEEE Transactions on Automatic Control. 2023
17. Rohn J. A handbook of results on interval linear problems. Czech Academy of Sciences, Prague, 2005, 80 p.
18. Shalaby M. A. The interval eigenvalue problem. // European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering, Barcelona, 11-14 September 2000
19. Wang K., Michel A. N., Liu D. Necessary and sufficient conditions for the Hurwitz and Schur stability of interval matrices // IEEE Transactions on Automatic Control, 1994, 39(6), pp. 1251-1255.

#### **11. Посилання на інформаційні ресурси в Інтернеті, відео-лекції, інше методичне забезпечення**

IEEE Std 1788-2015 – IEEE standard for interval arithmetic -  
<https://standards.ieee.org/standard/1788-2015.html>

Classical Control Theory (Brian Douglas) (набір із 46 відео) –  
<https://www.youtube.com/playlist?list=PLUMWjy5jgHK1NC52DXXrriwihVrYZKqjk>